Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»

А.П. Мелехов

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

*Методические материалы
для самостоятельной работы студентов
по курсу теоретической физики*

Рязань –2008

ББК 22.314
М 47

Печатается по решению редакционно-издательского совета Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина» в соответствии с планом изданий на 2008 год.

Научный редактор *Н.В. Коненков*, д-р физ.-мат. наук, проф.

Рецензенты: *М.Т. Терехин*, д-р физ.-мат. наук, проф.
А.Б. Ястребков, канд. физ.-мат. наук, доц.

Мелехов А.П. Криволинейные координаты: учебно-методическое пособие; Ряз. гос. ун-т им. С.А. Есенина. – Рязань, 2008. – 30 с.

Рассмотрены основные математические аспекты, относящиеся к понятию криволинейные координаты. В общем виде приведены выражения для градиента, дивергенции и ротора в криволинейных координатах и рассмотрены некоторые примеры криволинейных координат..

Ключевые слова: система координат, криволинейные координаты, коэффициенты Ламе.

ББК 22.311

§1. Криволинейные координаты.

Пусть имеем область G в трехмерном пространстве. Поставим в соответствие каждой точке $M\in G$, имеющей координаты (x, y, z) относительно некоторой прямоугольной системы координат, тройку чисел (q_1, q_2, q_3) из некоторого множества Q таким образом, что различным точкам M соответствуют различные тройки (q_1, q_2, q_3) и обратно, каждой тройке чисел (q_1, q_2, q_3) из рассматриваемого множества Q соответствует одна точка $M\in G$. Другими словами, точка M однозначно определяется тройкой чисел (q_1, q_2, q_3). Поэтому ее декартовы координаты (x, y, z) являются функциями чисел q_1, q_2, q_3

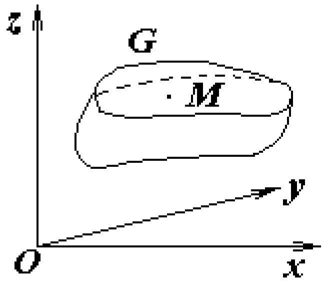

рис.1

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Учитывая, что

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \tag{1.2}$$

три скалярные функции (1.1) можно заменить одной векторной

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \tag{1.3}$$

Будем считать, что отображение (1.3) непрерывно, дифференцируемо и Якобиан его отличен от нуля:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y}{\partial q_1} & \dfrac{\partial z}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial q_2} & \dfrac{\partial y}{\partial q_2} & \dfrac{\partial z}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial q_3} & \dfrac{\partial y}{\partial q_3} & \dfrac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1.4)$$

Тогда существует обратное отображение

$$q_i = q_i\,(x, y, z), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Числа (q_1, q_2, q_3) называются *криволинейными координатами* точки M, а отображение (1.1) или (1.3) называется *криволинейной системой координат*.

Если в отображении (1.3) зафиксировать какие-либо две величины, например, q_2 и q_3 , а координате q_1 придавать все возможные значения, то оно будет определять множество точек, которое называется координатной *q_1-линией*. Аналогично получаются q_2 и q_3-линии. За положительное направление этих координатных линий принимается такое их направление, вдоль которого соответствующая переменная возрастает. Очевидно, что через каждую точку M можно провести три взаимно пересекающиеся координатные линии, которые в общем случае суть некоторые кривые. Этим и объясняется название – криволинейные координаты.

Пусть координаты q_2 и q_3 фиксированы, т.е. $q_2 = q_2^0$ и $q_3 = q_3^0$. Тогда отображение

$$\vec{r} = \vec{r}\,(q_1, q_2^0, q_3^0) \qquad (1.5)$$

есть функция одной переменной q_1, а ее производная $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ в точке M

есть касательный вектор $\vec{r}_1$ к q_1-линии в этой точке (рис. 2).

Таким образом,

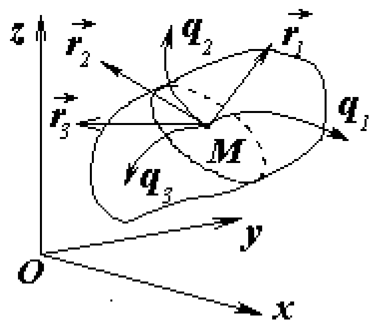

Рис.2.

$$\vec{r}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, 3). \tag{1.6}$$

Очевидно, что вектор $\vec{r}_j$ имеет компоненты

$$\vec{r}_j = \left(\frac{\partial x}{\partial q_j}, \frac{\partial y}{\partial q_j}, \frac{\partial z}{\partial q_j} \right). \tag{1.7}$$

Система криволинейных координат называется ортогональной, если в любой точке векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ попарно ортогональны, т.е. имеют место следующие равенства

$$\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = 0, \quad i \neq j \tag{1.8}$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} = 0. \tag{1.9}$$

Обозначим через H_i модуль вектора $\vec{r}_i$

$$H_i = \left|\vec{r}_i\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}. \tag{1.10}$$

Числа H_i называются метрическими коэффициентами или коэффициентами Ламэ.

Единичные орты осей криволинейной системы координат определяются равенствами

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{r}_i}{H_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (1.11)$$

Выразим теперь в криволинейных координатах элемент длины дуги, элемент криволинейной поверхности и элемент объема. Для этого напомним, что в декартовых координатах квадрат элемента длины dl^2 определяется выражением

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \qquad (1.12)$$

Из равенств (1.1) получим

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}dq_3, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}dq_3, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3. \end{aligned} \qquad (1.13)$$

Подставляя эти значения в (1.12) и принимая во внимание условия ортогональности (1.9), найдем, что

$$dl^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2. \qquad (1.14)$$

Отсюда сразу следует, что элемент длины дуги координатной линии равен

$$dl_i = H_i dq_i. \qquad (1.15)$$

Теперь легко увидеть, что элемент криволинейной поверхности $d\sigma_{ij}$, образованный i-ой и j-ой координатной линией, и элемент объема dV определяются равенствами

$$d\sigma_{ij} = H_i H_j dq_i dq_j, \qquad (1.16)$$

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \qquad (1.17)$$

§ 2. Градиент в криволинейных координатах

Пусть в некоторой области G задано дифференцируемое скалярное поле $\varphi(M)$. Следовательно, в каждой точке $M \in G$ существует вектор $\vec{P}$ такой, что

$$\vec{P} = grad\varphi. \qquad (2.1)$$

Если в точку M поместить начало декартовой системы координат, то проекции вектора $\vec{P}$ на оси этой системы координат представляются в виде:

$$P_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ P_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ P_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (2.2)$$

Если же в точку M поместить начало произвольной системы координат, то проекции вектора $\vec{P}$ будут выглядеть иначе. Чтобы найти их, вычислим скалярные произведения

$$\left(grad\varphi, \vec{e}_i\right), \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (2.3)$$

Здесь $\vec{e}_i$ – единичные орты произвольной ортогональной криволинейной системы координат, определяемые равенствами (1.11). В результате для проекций вектора $\vec{P}$ получаем

$$P_i = \left(grad\varphi, \vec{e}_i\right) = \frac{1}{H_i}\left(grad\varphi, \vec{r}_i\right) =$$

$$= \frac{1}{H_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}. \qquad (2.4)$$

Таким образом, выражение градиента в криволинейных координатах имеет вид

$$grad\varphi = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\vec{e}_i. \qquad (2.5)$$

Надо иметь в виду, что компоненты градиента, выраженные в криволинейных координатах, меняются от точки к точке не только вследствие того, что φ переменная величина, но еще и потому, что H_i и $\vec{e}_i$ непостоянны.

§ 3. Дивергенция в криволинейных координатах

Чтобы получить выражение для дивергенции в криволинейных координатах, будем исходить из ее инвариантного определения, которое запишем для элементарного объема ΔV, содержащего точку M_0:

$$div\vec{P}(M_0) = \frac{1}{\Delta V}\oiint\limits_{\Delta\sigma}(\vec{P},\vec{n})d\sigma = \frac{\Delta\Phi}{\Delta V}. \qquad (3.1)$$

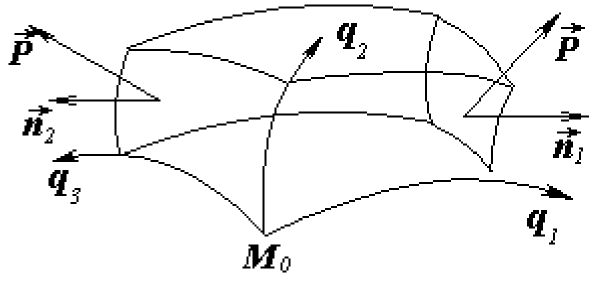

Рис.3.

Выберем в рассматриваемой области, где задано векторное поле, $\vec{P}$ произвольную криволинейную ортогональную систему координат с началом в точке M_0. В качестве элементарного объема ΔV рассмотрим криволинейный параллелепипед, построенный на координатных линиях (рис.3). Величину ΔV в криволинейных координатах запишем на основании формулы (1.7)

$$\Delta V = H_1 H_2 H_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3. \tag{3.2}$$

Рассмотрим теперь две грани этого параллелепипеда, перпендикулярные q_1 – линии. Обозначим нормаль к правой грани $\vec{n}_1$, а нормаль к левой $\vec{n}_2$. Тогда элементарный поток поля $\vec{P}$ через правую грань, может быть записан в виде

$$\Delta\Phi_{23}^1 = P_{n_1}(q_1 + \Delta q_1) H_2(q_1 + \Delta q_1) H_3(q_1 + \Delta q_1) \Delta q_2 \Delta q_3, \tag{3.3}$$

а через левую

$$\Delta\Phi_{23}^2 = P_{n_2}(q_1) H_2(q_1) H_3(q_1) \Delta q_2 \Delta q_3. \tag{3.4}$$

Суммарный поток $\Delta\Phi_{23}$ через обе эти грани равен

$$\Delta\Phi_{23} = \Delta\Phi_{23}^1 + \Delta\Phi_{23}^2 = \left[P_{n_1} H_2 H_3\big|_{q_1 + \Delta q_1} + P_{n_2} H_2 H_3\big|_{q_1} \right] \Delta q_2 \Delta q_3.$$

Учитывая, что

$$P_{n_2}(q_1) = -P_{n_1}(q_1), \tag{3.5}$$

для $\Delta\Phi_{23}$ имеем

$$\Delta\Phi_{23} = \left[P_{n_1} H_2 H_3 \Big|_{q_1+\Delta q_1} - P_{n_1} H_2 H_3 \Big|_{q_1} \right] \Delta q_2 \Delta q_3. \tag{3.6}$$

Пользуясь теперь формулой Тейлора

$$\Delta f = \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \ldots \tag{3.7}$$

и отбрасывая малые высших порядков, находим

$$\Delta\Phi_{23} = \frac{\partial}{\partial q_1}(P_1 H_2 H_3) \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3, \tag{3.8}$$

где $P_1 = P_{n_1}$. Далее очевидно, что

$$\Delta\Phi_{13} = \frac{\partial}{\partial q_2}(P_2 H_1 H_3) \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3, \tag{3.9}$$

$$\Delta\Phi_{12} = \frac{\partial}{\partial q_3}(P_3 H_1 H_2) \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3. \tag{3.10}$$

Полный же поток через всю поверхность параллелепипеда будет равен

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{23} + \Delta\Phi_{13} + \Delta\Phi_{12} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(P_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(P_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(P_3 H_1 H_2) \right] \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3.$$

Подставляя это значение потока и значение ΔV, выраженное в криволинейных координатах, в формулу (3.1) получим выражение для дивергенции в криволинейных координатах

$$div\vec{P} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i} (P_i \frac{H_1 H_2 H_3}{H_i}). \qquad (3.11)$$

§ 4. Ротор в криволинейных координатах

Чтобы получить выражение ротора в криволинейных координатах будем, как и в предыдущем случае, исходить из инвариантного его определения, которое запишем для элементарной площадки $\Delta\sigma$, ограниченной контуром ΔL, согласованно ориентированному с нормалью $\vec{n}$ к этой площадке

$$rot_n \vec{P}(M_0) = \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_{\Delta L} \vec{P} d\vec{l} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\sigma}. \qquad (4.1)$$

Элемент криволинейной поверхности $\Delta\sigma$, ограниченный контуром ΔL и образованный отрезками координатных линий q_i и q_j, равен $\Delta\sigma_{ij} = H_i H_j \Delta q_i \Delta q_j$. Циркуляция $\Delta\Gamma$ по контуру ΔL, ограничивающему площадку $\Delta\sigma$, запишем в виде

$$\Delta\Gamma = \oint_{\Delta L} \vec{P} d\vec{l} = P_l \Delta l. \qquad (4.2)$$

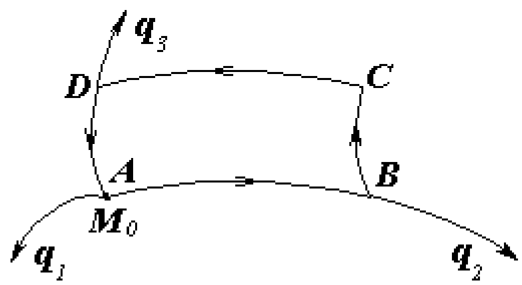

Рис.4.

Выберем в области G, где задано векторное поле, криволинейную ортогональную систему координат с началом в точке M_0 (рис. 13). Найдем проекцию ротора на направление q_1-линии. В соответствии с формулой (4.1)

эта проекция равна

$$rot_{q_1} \vec{P} = \frac{\Delta\Gamma_{ABCD}}{\Delta\sigma_{23}}. \tag{4.3}$$

Величина $\Delta\sigma_{23}$ согласно формуле (1.16) имеет вид

$$\Delta\sigma_{23} = H_2 H_3 \Delta q_2 \Delta q_3. \tag{4.4}$$

Вычислим $\Delta\Gamma_{ABCD}$. Очевидно, что

$$\Delta\Gamma_{ABCD} = \oint\limits_{ABCD} P_l dl = \int\limits_{AB} P_2 dl_2 + \int\limits_{BC} P_3 dl_3 + \int\limits_{CD} P_2 dl_2 + \int\limits_{DA} P_3 dl_3. \tag{4.5}$$

Так как $\Delta l_i = H_i \Delta q_i$, а поле $\vec{P}$ в плоскости q_1 = const двумерно, получим:

$$\Delta\Gamma_{AB} = \int\limits_{AB} P_2 dl_2 = P_2(q_3) H_2(q_3) \Delta q_2,$$

$$\Delta\Gamma_{BC} = \int\limits_{BC} P_3 dl_3 = P_3(q_2 + \Delta q_2) H_3(q_2 + \Delta q_2) \Delta q_3,$$

$$\Delta\Gamma_{CD} = \int\limits_{CD} P_2 dl_2 = -P_2(q_3 + \Delta q_3) H_2(q_3 + \Delta q_3) \Delta q_2,$$

$$\Delta\Gamma_{DA} = \int\limits_{DA} P_3 dl_3 = -P_3(q_2) H_3(q_2) \Delta q_3.$$

Подставив эти значения в формулу (4.5) и пользуясь формулой Тейлора, получим

$$\Delta\Gamma_{ABCD} = \left[\frac{\partial(P_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(P_2H_2)}{\partial q_3}\right]\Delta q_2 \Delta q_3. \tag{4.6}$$

Подставляя теперь значения $\Delta\Gamma_{ABCD}$ и $\Delta\sigma_{23}$ в формулу (4.3), находим

$$rot_{q_1}\vec{P} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(P_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(P_2H_2)}{\partial q_3}\right]. \tag{4.7}$$

Далее очевидно, что

$$rot_{q_2}\vec{P} = \frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial(P_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(P_3H_3)}{\partial q_1}\right], \tag{4.8}$$

$$rot_{q_3}\vec{P} = \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(P_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(P_1H_1)}{\partial q_2}\right]. \tag{4.9}$$

Поэтому полное выражение для ротора в криволинейных координатах имеет вид

$$rot\vec{P} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(P_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(P_2H_2)}{\partial q_3}\right]\vec{e}_1 + \tag{4.10}$$

$$+\frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial(P_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(P_3H_3)}{\partial q_1}\right]\vec{e}_2 + \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(P_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(P_1H_1)}{\partial q_2}\right]\vec{e}_3.$$

§ 5. Оператор Лапласа в криволинейных координатах

Чтобы получить выражение оператора Лапласа в криволинейных координатах воспользуемся формулой

$$\Delta\varphi = div\ grad\varphi. \tag{5.1}$$

Полагая в формуле (3.11)

$$P_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}, \tag{5.2}$$

получаем

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i^{\ 2}}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\right). \tag{5.3}$$

Отсюда ясно, что оператор Лапласа в криволинейных координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i^{\ 2}}\frac{\partial}{\partial q_i}\right). \tag{5.4}$$

§ 6. Цилиндрическая система координат. Градиент, дивергенция, ротор и оператор Лапласа в цилиндрических координатах

Цилиндрическая система координат определяется следующим образом:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad z = z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = {}^{y}\!/_{x}$$
$$(0 \le r \le \infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\infty \le z \le \infty). \tag{6.1}$$

Используя формулы (1.10), (1.14), (1.16) и (1.17) находим

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1,$$
$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$
$$d\sigma_r = rd\varphi dz, \quad d\sigma_\varphi = drdz, \quad d\sigma_z = rdrd\varphi, \quad dV = rdrd\varphi dz$$

С помощью формул (1.11) найдем выражения единичных ортов цилиндрической системы координат через орты декартовой системы

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi, \\ \vec{e}_\varphi &= -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi, \\ \vec{e}_z &= \vec{k}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Нетрудно получить и обратную связь

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{e}_r\cos\varphi - \vec{e}_\varphi\sin\varphi, \\ \vec{j} &= \vec{e}_r\sin\varphi + \vec{e}_\varphi\cos\varphi, \\ \vec{k} &= \vec{e}_z. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Воспользовавшись формулами (2.5), (3.11), (4.7-4.9) и (5.3), найдем выражения для компонентов градиента, дивергенции, компонентов ротора и лапласиана в цилиндрических координатах:

$$grad_r\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad grad_\varphi\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad grad_z\psi = \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$div\vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rP_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z},$$

$$rot_r\vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial P_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial z}, \quad rot_\varphi\vec{P} = \frac{\partial P_r}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial r}, \quad rot_z\vec{P} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rP_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial P_r}{\partial\varphi}\right],$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

§ 7. Сферическая система координат. Градиент, дивергенция, ротор и оператор Лапласа в сферических координатах

Сферическая система координат определяется следующим образом:

$$\begin{gathered} x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \\ (0 \le r \le \infty, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi). \end{gathered} \tag{7.1}$$

Используя формулы (1.10), (1.14), (1.16) и (1.17) находим

$$\begin{gathered} H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta, \\ dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2, \\ d\sigma_r = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \quad d\sigma_\theta = r\sin\theta\, dr d\varphi, \quad d\sigma_\varphi = r dr d\theta \\ dV = r^2\sin\theta\, dr d\theta\, d\varphi. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Единичные орты сферической системы координат

$$\vec{e}_r = \vec{i}\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta,$$
$$\vec{e}_\theta = \vec{i}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta, \qquad (7.3)$$
$$\vec{e}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi.$$

Компоненты градиента в сферических координатах

$$grad_r\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad grad_\theta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad grad_\varphi\psi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \quad . \qquad (7.4)$$

Дивергенция в сферических координатах

$$div\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 P_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(P_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi}. \qquad (7.5)$$

Ротор в сферических координатах

$$rot_r\vec{P} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(P_\varphi\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial P_\theta}{\partial\varphi}\right],$$
$$rot_\theta\vec{P} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial\left(rP_\varphi\right)}{\partial r}\right], \qquad (7.6)$$
$$rot_\varphi\vec{P} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rP_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial P_r}{\partial\theta}\right].$$

Лапласиан в сферических координата

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial\left(r^2\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = \right]. \tag{7.7}$$

§ 8. Скорость и ускорение в сферических координатах

В качестве примера использования сферических координат получим выражения для скорости и ускорения материальной точки.

Скорость, по определению, есть производная радиуса-вектора по времени. Запишем выражение для радиуса-вектора в сферических координатах

$$\begin{aligned} \vec{r}\left(t\right) &= \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = \\ &= \vec{i}\,r\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\,r\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\,r\cos\theta. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Тогда для скорости $\vec{\vartheta}\left(t\right)$ имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\vartheta}\left(t\right) = \dot{\vec{r}} &= \vec{i}\,\dot{r}\sin\theta\cos\varphi + \vec{i}\,r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \vec{i}\,r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi + \\ &+ \vec{j}\,\dot{r}\sin\theta\sin\varphi + \vec{j}\,r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \vec{i}\,r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi + \\ &+ \vec{k}\,\dot{r}\cos\theta - \vec{k}\dot{\theta}\,r\sin\theta = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Учитывая, что проекции единичных ортов на оси декартовой системы координат так же являются функциями времени, найдем их производные:

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\left(\vec{i}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta\right) + \dot{\varphi}\sin\theta\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right) =$$
$$= \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi,$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\left(\vec{i}\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta\right) + \dot{\varphi}\cos\theta\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right) =$$
$$= -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi,$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right) = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta.$$
$$+\begin{cases}\sin\theta\,\vec{e}_r = \vec{i}\sin^2\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin^2\theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\,\vec{e}_\theta = \vec{i}\cos^2\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos^2\theta\sin\varphi - \vec{k}\cos\theta\sin\varphi\end{cases} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$$

С учетом этих значений будем искать выражение ускорения в сферических координатах. Ускорение, по определению, есть производная скорости. Поэтому

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$+ r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\dot{\vec{e}}_\varphi .$$

Подставляя сюда значения производных единичных ортов и группируя члены находим, компоненты ускорения в сферических координатах

$$\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right),\\
a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta,\\
a_\varphi &= 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\right).
\end{aligned} \tag{7.11}$$